a

Pierwiastkowanie

Podczas gdy humaniści będą szukać pierwiastka dobra w potępionych niegodziwcach, chemicy brakujących pierwiastków w tablicy Mendelejewa, my zajmiemy się poszukiwaniem pierwiastków liczb w naszym odrealnionym świecie. Tak jak odejmowanie jest odwrotnością dodawania, dzielenie jest odwrotnością mnożenia, tak pierwiastkowanie to odwrotność potęgowania.

Potęga na opak

Intuicje

Maciuś uzbierał w skarbonce 80 zł na nowy zestaw Lego, a teraz chce naciągnąć rodziców na taką kwotę, żeby w sumie wyszło 130 zł na mega statek kosmiczny.[[1]](#footnote-1)

Aby poznać brakujący składnik, Maciuś musi wykonać odejmowanie, czyli spojrzeć na dodawanie od drugiej strony.

Rok później przyjaciele Maciusia postanowili kupić mu na urodziny zestaw małego architekta[[2]](#footnote-2) za 200 zł. Było ich pięcioro, a każdy z nich powinien mieć równy wkład w prezent. Powstało pytanie, po ile powinni się złożyć:

Odpowiedź przynosi wykonanie dzielenia:

Maciuś, szczęśliwy posiadacz od groma klocków, postanowił zbudować dzieło swojego życia: ogromną, wypełnioną w środku bryłę w sześciennym kształcie. Oczywiście Maciuś wie, że idealna bryła powinna mieć tyle samo klocków wysokości, szerokości i głębokości. Ponieważ Maciuś nigdy nie był normalnym dzieckiem, postanowił najpierw policzyć, ile ma klocków, aby zdecydować się co do wymiarów pokaźnej budowli. Okazało się, że jest ich 512 w przeliczeniu na klocki jednostkowe. Pytanie brzmi, jakie powinny być wymiary budowli, aby starczyło na nią 512 klocków? Pojawia się dylemat:

Gdy przypomnimy sobie wartości podstawowych kwadratów i sześcianów liczb, dotrzemy do prawdy:

A więc Maciuś może pozwolić sobie na niesamowitą budowlę o wymiarach klocków.

Operacja, której dokonaliśmy, aby poznać odpowiedź, to właśnie działanie odwrotne do potęgowania: dokonaliśmy pierwiastkowania liczby 512:

Powyższy zapis odczytujemy „pierwiastek trzeciego stopnia z 512 wynosi 8” i oznacza on właśnie tyle, że 8 podniesione do potęgi trzeciej daje 512.

Formalnie

Jeśli oraz są liczbami dodatnimi, stwierdzenie, że jest dokładnie równoważne równości . W taki właśnie sposób definiujemy pierwiastek: to taka liczba , dla której . Matematycznie zapiszemy definicję pierwiastka w jednej linijce:

Symbol oznacza równoważność, czyli stwierdzenie, że to, co po lewej stronie jest równoważne z tym, co po prawej stronie.

Nazewnictwo

Intuicje

O pierwiastkowaniu należy myśleć jak o działaniu, które przyjmuje dwa parametry i zwraca w odpowiedzi wynik. Liczba zapisana pod symbolem to *liczba podpierwiastkowa*, a liczba umieszczona „na dłoni” tego symbolu w lewym górnym rogu to *stopień pierwiastka*.

Ponieważ drugą potęgę liczby nazywamy kwadratem, a trzecią sześcianem tej liczby, analogiczne nazewnictwo wprowadzono dla pierwiastków: pierwiastek drugiego stopnia nazywamy *pierwiastkiem kwadratowym*, a pierwiastek trzeciego stopnia *pierwiastkiem sześciennym*. Co więcej, ponieważ pierwiastki kwadratowe spotyka się w matematyce najczęściej, zwyczajowo pomija się dwójkę do oznaczania pierwiastka drugiego stopnia. Zapisy: oraz oznaczają dokładnie to samo. Zazwyczaj kiedy mówimy po prostu „pierwiastek z 4” mamy na myśli właśnie pierwiastek kwadratowy.

W dziedzinie informatycznej do oznaczania pierwiastka drugiego stopnia stosuje się oznaczenie jako skrót od „square root” – pierwiastek kwadratowy. Jeśli chcesz obliczyć pierwiastek kwadratowy z 25 w wyszukiwarce lub w kalkulatorze internetowym, spróbuj wpisać .

Obliczanie pierwiastków

Intuicje

Przypomnijmy sobie tabelkę z wartościami kwadratów i sześcianów liczb naturalnych. Możemy przedstawić ją w równoważnej, nieco zmodyfikowanej formie:

Obliczanie pierwiastka jest bardzo łatwe, jeżeli pierwiastkujemy liczbę, którą rozpoznajemy jako odpowiednią potęgę liczby naturalnej. Sprawa robi się ciekawa, gdy zapytamy o wartość pierwiastka z liczby leżącej pomiędzy powyższymi.

Jaką wartość ma ? Innymi słowy, jaka liczba podniesiona do kwadratu daje 2? Zauważmy, że 1 podniesione do kwadratu daje 1, czyli mniej niż chcemy, a 2 podniesione do kwadratu daje 4, czyli więcej niż chcemy. Możemy więc podejrzewać, że tajemnicza wartość leży gdzieś pomiędzy 1 a 2, a więc z pewnością musi to być liczba z częścią ułamkową. A więc próbujemy:

* , czyli 1,5 to za dużo
* , czyli 1,2 to za mało
* , czyli 1,4 to wciąż za mało, chociaż jesteśmy już bardzo blisko
* , a więc 1,41 to już bardzo bliska wartość, choć wciąż za mała
* , czyli powinniśmy szukać pomiędzy 1,41 a 1,42

Grę w zgaduj zgadula moglibyśmy kontynuować jeszcze bardzo, bardzo długo. Gdyby starczyło nam cierpliwości, znaleźlibyśmy więcej cyfr mistycznej liczby :

Do tej pory zawsze, gdy obcowaliśmy z ułamkami dziesiętnymi, rozwinięcie dziesiętne albo kończyło się w pewnym miejscu, albo zaczynało zataczać pętle, ujawniając swój okres. Okazuje się, że w przypadku liczby nic takiego nie ma miejsca: rozwinięcie dziesiętne jest **nieskończone** i **nieokresowe**. Z powodu takiego zachowania wyróżnia się nowy rodzaj liczb: *liczby niewymierne*. Wprowadźmy istotne rozróżnienie:

* Liczby wymierne to takie, których rozwinięcie dziesiętne jest skończone lub posiada okres. Każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci ułamka zwykłego, który posiada w liczniku oraz w mianowniku liczbę całkowitą;
* Liczby niewymierne posiadają nieskończone rozwinięcie dziesiętne, w którym nie ma okresu. Liczby niewymiernej nie da się zapisać jako ułamek zwykły mający w liczniku i mianowniku liczbę całkowitą.

Liczby wymierne i niewymierne obejmujemy wspólnym mianem *liczby rzeczywiste*. Praktycznie patrząc, liczba rzeczywista to każda liczba, którą da się zapisać w systemie dziesiętnym. W obserwowalnym świecie wszystko, co chcemy opisać przy pomocy pewnej miary – czy to długość, temperaturę, wagę, odcień koloru, poziom jasności czy ilość sąsiadek obgadujących nas za plecami – można wyrazić liczbą rzeczywistą. Liczby nierzeczywiste to już wyłącznie wymysły matematyków na poziomie czarnoksiężników.

Ostatecznie jednak nie odpowiedzieliśmy na pytanie, jak obliczać pierwiastki. Smutna lecz prawdziwa odpowiedź brzmi: na kalkulatorze. Metoda „zgaduj zgadula” przedstawiona przed chwilą to jedna z prostszych i bardziej efektywnych metod obliczania pierwiastków, gdy nie mamy pod ręką komputera. Miejmy na uwadze, że obliczenie pierwiastka czwartego stopnia przez zgadywanie wymagałoby podnoszenia do czwartej potęgi każdego kandydata…

W praktyce najczęściej spotykanymi pierwiastkami są pierwiastki kwadratowe i sześcienne. Gdy w przyszłości w trakcie obliczeń napotkamy np. , nie będziemy próbowali „obliczyć go” przez rozpisanie rozwinięcia dziesiętnego – zostawimy go w spokoju. Liczby niewymierne są w pewnym sensie nietykalne obliczeniowo.

Mimo wszystko dobrze jest mieć wyobrażenie, jak mniej więcej wyglądają niektóre pierwiastki:

Potęgi o wykładniku wymiernym

Intuicje

Pora rozwiązać zagadkę, która wywiązała się w temacie o potęgowaniu: co zrobić, gdy w wykładniku potęgi pojawia się ułamek? Spróbujmy rozgryźć wartość

Chwilowo liczba „trzy do potęgi jednej drugiej” pozostaje dla nas tajemnicą. Skorzystamy z pewnych własności potęgowania, które odkryliśmy jakiś czas temu: co by się stało, gdyby podnieść do kwadratu?

Skorzystaliśmy z własności

która mówi, że gdy potęgę podnosimy do potęgi, mnożymy przez siebie wykładniki. Odkryliśmy ciekawą rzecz: to taka liczba, że jak ją podniesiemy do kwadratu, dostaniemy 3. A przecież „liczba, która podniesiona do kwadratu, daje 3” to nic innego niż . Wniosek jest nieunikniony:

Trik stosuje się do wszystkich wykładników typu „jeden przez coś”:

* , a więc
* , a więc

W ogólności:

a więc

Poszerzmy nasze rozumowanie na wykładniki typu „coś przez coś”. Ponownie pomocna będzie własność dotycząca mnożenia wykładników:

W ogólności:

Dotarliśmy do bardzo przydatnego wzoru, który wskazuje przejście pomiędzy pierwiastkiem i potęgą:

To spostrzeżenie rozwiązuje przy okazji inny dylemat – jak traktować pierwiastki o stopniu wymiernym[[3]](#footnote-3):

Potęgi o wykładniku rzeczywistym

Rozszerzenie

Zbyt ciekawskie osoby, które lubią pytania „co by było gdyby” pewnie zastanawiają się, jak wykonuje się potęgowanie o wykładniku niewymiernym. Przykładowo, jak oblicza się ? Otóż: nie oblicza się. Najlepiej zostawić to w spokoju i nie tykać kijem, ale jeśli ktoś jest bardzo ciekaw wartości liczbowej takiego mutanta, może dokonywać przybliżeń. to około 1,41, więc to około . Jeśli zależy nam na dokładniejszym wyniku, musimy lepiej przybliżyć . Jeśli weźmiemy ,

to przybliżymy jako

Coraz dokładniejsze przybliżenia będą wywoływać coraz mniej znaczące modyfikacje w pożądanym wyniku.

Ograniczenia

Intuicje

Wykonywanie dzielenia narzucało dość istotną zasadę: nie wolno dzielić przez 0. Pierwiastkowanie również narzuca kilka ograniczeń, istnieją pierwiastki zabronione.

Wiemy już że dowolna liczba podniesiona do potęgi zerowej daje 1:

Dlatego, jak się dobrze zastanowić, nie ma sensu pytać o pierwiastek zerowego stopnia. Pierwiastek typu stawiałby pytanie „jaka liczba podniesiona do potęgi 0 daje 3?” z oczywistą odpowiedzią: „żadna”. Podobnie, pierwiastek stawia pytanie: „jaka liczba podniesiona do potęgi 0 daje 1?” na co odpowiedź brzmi „każda”. Ponieważ tego typu rozmówki podpadają pod paranoiczne, zabrania się pierwiastkowania z zerowym stopniem.

Wiemy także, że podnoszenie liczb ujemnych do parzystych potęg daje wynik dodatni:

Oczywiście podnoszenie liczb dodatnich do kwadratu także daje wynik dodatni. Uwzględniając 0, które podniesione do kwadratu daje 0, możemy stwierdzić ogólnie, że **każda** liczba podniesiona do kwadratu daje wynik nieujemny (dodatni lub zerowy). Co mógłby oznaczać pierwiastek z liczby ujemnej? to rzekomo taka liczba, która podniesiona do kwadratu daje -4… Trochę ciężko o takiego delikwenta, skoro podniesienie do kwadratu nie może dawać liczby ujemnej. Ustalamy więc zasadę: nie wolno wyciągać pierwiastków parzystego stopnia z liczb ujemnych.

Rygor ten nie dotyczy pierwiastków nieparzystego stopnia:

, ponieważ

Mimo wszystko pierwiastkowanie liczb ujemnych lub podnoszenie ich do ułamkowych potęg to stąpanie po cienkim lodzie. Przez nieuwagę bardzo łatwo można wpaść w pułapkę:

Właśnie za pomocą kilku przekształceń pokazaliśmy, że . Stwierdzenie „mieć ciastko i nie mieć ciastka to przecież to samo” brzmi cokolwiek nihilistycznie, dlatego miejmy na uwadze rolę licznika i mianownika w wykładniku we wzorze

Gdy podnosimy liczbę do potęgi ułamkowej, powinniśmy najpierw dokonać pierwiastkowania ze względu na mianownik, a dopiero później potęgowania ze względu na licznik. Kolejność ta nie ma znaczenia dla dodatnich , jednak zmienia dużo w przypadku poniżej zera.

Rozszerzenie

Tak naprawdę… wolno wyciągać pierwiastki parzystego stopnia z liczb ujemnych. Ale w tym momencie wychodzimy poza rozważania na temat liczb rzeczywistych. W lekcji „Liczby zespolone” dowiemy się, że liczbę traktuje się w sposób specjalny, jak upośledzone dziecko matematycznych rozkoszy cielesnych matematyka po czterdziestce ze swoją niewyżytą wyobraźnią. Pierwiastki z liczb ujemnych nazywamy (całkiem poważnie) *liczbami urojonymi*, a dla wprowadzono specjalne oznaczenie: , literka na cześć słowa „imaginary” – wyimaginowany, urojony. Aby zajmować się liczbami zespolonymi na poważnie, trzeba przebyć jeszcze dość długą drogę.

Własności pierwiastkowania

Formalnie

Skoro już wiemy, że każdy pierwiastek można przedstawić w postaci potęgi, nie powinno dziwić, że własności potęgowania przenoszą się na adekwatne własności pierwiastkowania. Przyjmujemy, że stopnie pierwiastków mają wartości całkowite. Dla przejrzystości pomijamy cały cyrk z dodatnimi/ujemnymi wartościami liczb podpierwiastkowych.

Uzasadnienie:

Oznaczmy wartość wyrażenia przez . Zgodnie z definicją pierwiastkowania:

Zatem

Uzasadnienie:

Oznaczmy wartość wyrażenia przez oraz wartość wyrażenia przez . Z definicji pierwiastkowania:

Skoro oraz , to . Mamy więc

Uzasadnienie:

Oznaczmy wartość wyrażenia przez oraz wartość wyrażenia przez . Z definicji pierwiastkowania:

Skoro oraz , to . Mamy więc

Formalnie | Rozszerzenie

Możemy teraz pełnoprawnie poszerzyć własności potęgowania na wykładniki wymierne.

Co więcej, własności te działają także dla wykładników rzeczywistych. Ucinając w pewnym miejscu rozwinięcie dziesiętne, można przybliżyć liczbę rzeczywistą (z dowolną dokładnością) do liczby wymiernej, a dla liczb wymiernych nasze własności już działają. Intuicyjnie możemy sobie wyobrazić, że przybliżając liczbę rzeczywistą coraz dokładniej, coraz bardziej zbliżamy się do jej rzeczywistej wartości, cały czas zachowując własności potęgowania. W końcu dotrzemy do „nieskończonej” precyzji i okaże się, wykładniki niewymierne także zachowują powyższe własności.

Trzy własności pierwiastkowania wykazane na początku tej sekcji także działają dla stopni wymiernych:

Na podobnej zasadzie własności te działają także dla stopni rzeczywistych.

Wyłączanie czynnika przed pierwiastek

Warsztat

Obliczanie pierwiastków istotnie sprowadza się do wklepania liczb do kalkulatora, zaś my jako śmiertelnicy możemy jedynie starać się o sprowadzenie wyrażenia do najprostszej postaci – podobnie, jak ułamki zwykłe sprowadzamy do postaci nieskracalnej, bo tak wyglądają „ładniej”, chociaż wartość dziesiętną obliczamy tak czy inaczej na kalkulatorze.

Upraszczanie pierwiastków wykorzystuje drugą z wyżej wymienionych własności pierwiastkowania:

Liczba 20 jest liczbą złożoną, a jednym z jej czynników składowych jest 4 – czyli dobrze znany nam kwadrat 2. Możemy więc dokonać uproszczenia nazywanego wyłączaniem czynnika przed pierwiastek i zapisać w postaci . Zaleta jest m.in. taka, że mało kto zna na pamięć wartość , ale są tacy, którzy pamiętają przybliżenie , co pozwala na oszacowanie .

Aby najpełniej wyłączyć czynnik przed pierwiastek, musimy dokonać rozkładu na czynniki pierwsze liczby podpierwiastkowej. Spróbujmy uprościć . Najpierw dokonujemy rozkładu:

|  |  |
| --- | --- |
| 6804 | 2 |
| 3402 | 2 |
| 1701 | 3 |
| 567 | 3 |
| 189 | 3 |
| 63 | 3 |
| 21 | 3 |
| 7 | 7 |
| 1 |  |

Interesują nas te czynniki pierwsze, które występują przynajmniej w drugiej potędze – to właśnie je będziemy wyłączać przed pierwiastek.

Możemy też wyłączać przed pierwiastek trochę bardziej „na żywioł”. Weźmy .

* Sprawdzamy, czy liczba podpierwiastkowa dzieli się przez 4. 20250 nie jest podzielne przez 4, więc nie wyciągniemy dwójki przed pierwiastek.
* Sprawdzamy więc, czy 20250 dzieli się przez 9 – skoro tak, wyciągamy .
* Do skutku próbujemy wyciągnąć 9 spod pierwiastka, przy kolejnej próbie: .
* Więcej razy nie wyciągniemy 9 spod pierwiastka, więc próbujemy wyciągać kwadrat kolejnej liczby pierwszej: 25. Odnosimy zwycięstwo: .
* Pierwiastek z 10 dość zauważalnie jest już nierozkładalny.

Wyciąganie niewymierności z mianownika

Warsztat

[wymagana znajomość tematu: Działania na wyrażeniach algebraicznych]

Oprócz wyłączania czynnika przed pierwiastek, stosuje się jeszcze jeden zabieg mający sprawić, że liczba będzie zapisana „ładnie”. Otóż matematycznie nieeleganckie jest pozostawianie pierwiastków w mianowniku ułamka. Liczbę

można zapisać w innej postaci rozszerzając licznik i mianownik przez :

Ułamki oraz reprezentują dokładnie tę samą liczbę, jednak zapis w drugiej formie ma zasadniczą przewagę: pozwala na dokładniejsze szacowanie wartości. Przypuśćmy, że chcemy poznać przybliżoną wartość dziesiętną liczby , w tym celu musimy najpierw dokonać przybliżenia :

* Jeśli przybliżymy , dostaniemy
* Jeśli przybliżymy , dostaniemy
* Jeśli przybliżymy , dostaniemy
* Jeśli przybliżymy , dostaniemy

Im więcej weźmiemy cyfr rozwinięcia , tym wierniej przybliżymy rzeczywistą wartość . Biorąc przybliżenie

otrzymamy

I wynik ten możemy uznać za zadowalająco dokładny. Sprawdźmy dla porównania, jak wygląda szacowanie liczby :

* Jeśli przybliżymy , dostaniemy
* Jeśli przybliżymy , dostaniemy
* Jeśli przybliżymy , dostaniemy
* Jeśli przybliżymy , dostaniemy

Oprócz tego, że obliczanie przybliżonych wartości jest znacznie łatwiejsze od obliczania (mnożenie przez ułamek dziesiętny jest prostsze, niż dzielenie przez ułamek dziesiętny), daje także dokładniejsze wyniki. Zbierzmy wnioski w tabeli:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Szacowanie** | **Szacowanie** | **Różnica od dokładnego wyniku** | **Szacowanie** | **Różnica od dokładnego wyniku** |
|  |  | 0,0215367993 |  | 0,02132034356 |
|  |  | 0,00633923091 |  | 0,00632034356 |
|  |  | 0,00032039194 |  | 0,00032034356 |
|  |  | 0,00002034375 |  | 0,00002034355 |

Przybliżenia otrzymane po wyciągnięciu niewymierności z mianownika różnią się mniej od dokładnego wyniku, niż przybliżenia z pierwiastkiem w mianowniku.

W większości przypadków wyciąganie niewymierności z mianownika jest łatwe i sprowadza się do odpowiedniego rozszerzenia licznika i mianownika:

Nieco kłopotliwe jest usuwanie z mianownika pierwiastka będącego składnikiem sumy:

Idea wyciągania niewymierności z mianownika polega na takim zmodyfikowaniu ułamka, aby pierwiastek w mianowniku uległ podniesieniu do potęgi i zniknął. Łatwo się przekonać, że rozszerzenie powyższego ułamka przez mianownik nie jest skuteczną metodą - postępując w ten sposób, uzyskujemy niewymierność zarówno w mianowniku, jak i w liczniku ułamka. Możemy jednak z powodzeniem skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

Rozszerzamy licznik i mianownik ułamka przez różnicę składników w mianowniku, a następnie korzystamy ze wzoru

dzięki któremu pierwiastek w mianowniku znika.

Warsztat | Rozszerzenie

[wymagana znajomość tematu: Działania na wyrażeniach algebraicznych]

Jeśli jakiemuś nieszczęśnikowi przyjdzie kiedyś wyciągać niewymierność z mianownika, w którym jako składnik sumy występuje pierwiastek inny niż kwadratowy – szczerze współczujemy. Wzór na różnicę kwadratów

należy wówczas zastąpić odpowiednim wzorem na różnicę wyższych potęg. Dla pierwiastków trzeciego stopnia przydatne będą wzory

Dla pierwiastków czwartego stopnia:

itd.

1. Właściwie patrząc na dzisiejsze ceny, może starczyłoby na kapsułę ratunkową… [↑](#footnote-ref-1)
2. Ponieważ dobrze wiedzieli, że Maciuś nigdy nie zostanie wielkim architektem [↑](#footnote-ref-2)
3. Z należytym szacunkiem [↑](#footnote-ref-3)